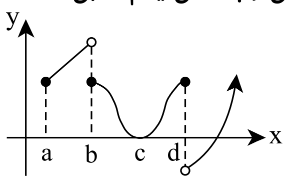
۱. اندازه‌ی بیش‌ترین شدت نزول تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) 2　　۴) $\frac{2}{3}$

-قلم چی-۱۳۹۵

۲. نمودار تابع f به صورت زیر است. با توجه به نمودار، تابع به ترتیب از راست به چپ چند ماکسیمم نسبی و چند می‌نیمم نسبی دارد؟



۱) یک- یک　　۲) دو- یک
۳) یک- دو　　۴) یک- صفر

-قلم چی-۱۳۹۵

۳. تابع $f(x)=|x^2-1|$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) 1　　۲) 2　　۳) 3　　۴) 4

-قلم چی-۱۳۹۵

۴. منحنی نمایش تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x^3-9x^2+12x-7$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(2,+\infty)$　　۲) $(1,2)$　　۳) $(1,\frac{3}{2})$　　۴) $(-\infty,1)$

-قلم چی-۱۳۹۵

۵. اگر $A(1,2)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$ باشد. طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

۱) صفر　　۲) -1　　۳) 1　　۴) فاقد نقطه‌ی عطف

-قلم چی-۱۳۹۵

۶. کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$ در بازه‌ی $[-1,2]$ کدام است؟

۱) 1　　۲) صفر　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) $-\frac{2}{7}$

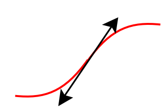
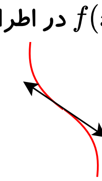
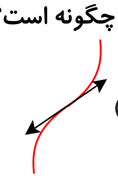
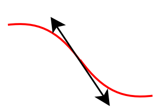
-قلم چی-۱۳۹۵

۷. تقعر تابع $f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$ در بازه‌ی $(-3,3)$ از چپ به راست چگونه است؟

۱) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.　　۲) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا است.
۳) همواره رو به بالا است.　　۴) همواره رو به پایین است.

-قلم چی-۱۳۹۵

۸. نمودار تابع $f(x)=-x^3-x+1$ در اطراف نقطه‌ی عطفش چگونه است؟

۱) 　　۲) 　　۳) 　　۴) 

-قلم چی-۱۳۹۵

۹. نمودار تابع $f(x)=xLnx$ در حوالی $x=1$ به کدام صورت است؟

۱) 　　۲) 
۳) 　　۴) 

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۰. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & ; \quad x<1 \\ a & ; \quad x=1 \\ 3-2x & ; \quad x>1 \end{cases}$ در $x=1$ ماکسیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۱. به ازای کدام مقدار a تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=-\frac{1}{3}ax^3+(a^2+3)x^2+x-1$ در بازه‌ی $(-\infty,4)$ به طرف بالا و در بازه‌ی $(4,+\infty)$ به طرف پایین است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{-1,-3\}$ ۳) $\{1,3\}$ ۴) $\{-3\}$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۲. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{(x-1)^2+1}$ مجانب مایل خود را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $1/5$ ۴) $2/5$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۳. تابع با ضابطه‌ی $y=xe^{x-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(0,2)$ ۲) $(-\frac{1}{2},1)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(1,2)$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۴. اگر منحنی به معادله‌ی $y=x+\sqrt{ax^2-4x}$ مجانب افقی داشته باشد، معادله‌ی مجانب مایل آن کدام است؟

۱) $y=2x-2$ ۲) $y=2x-1$

۳) $y=-2x-1$ ۴) $y=3x-2$

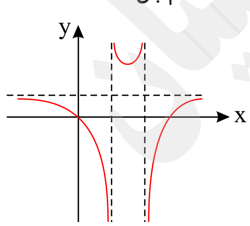
-قلم چی-۱۳۹۵

۱۵. مقدار ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-8x^2$ روی بازه‌ی $[-1,3]$، چقدر از مقدار می‌نیمم مطلق آن روی این بازه بیش‌تر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۶

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۶. اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+bx+c}$ باشد، دوتایی (b,c) کدام می‌تواند باشد؟



۱) $(-4,3)$ ۲) $(-4,0)$

۳) $(-3,3)$ ۴) $(3,2)$

-قلم چی-۱۳۹۵

۱۷. مرکز تقارن نمودار منحنی $f(x)=x^3-3ax^2-16$ روی محور xها قرار دارد. a کدام است؟

۱) -2 ۲) ۳ ۳) -4 ۴) ۱

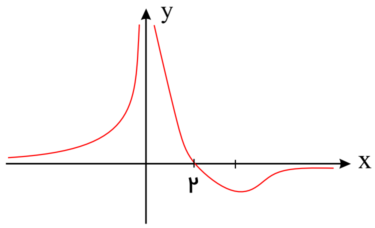
-قلم چی-۱۳۹۵

۱۸. اگر $A(1,-11)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

-خارج از کشور-۱۳۹۵

۱۹. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b، عرض مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) $-\dfrac{1}{8}$

۲) $-\dfrac{1}{4}$

۳) $-\dfrac{3}{8}$

۴) $-\dfrac{1}{2}$

–خارج از کشور–۱۳۹۵

۲۰. اگر خط $y=4$، مجانب افقی $f(x)=\dfrac{(a+3)x^3+4x^2+3}{bx^2-1}$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی نقاط تلاقی مجانب‌های منحنی کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

–قلم چی–۱۳۹۵

۲۱. نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^2+kx+4}{x^2+2x+6}$ فقط یک اکسترمم نسبی دارد. آن‌گاه عرض نقطه‌ی اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{3}{4}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) $\dfrac{3}{5}$

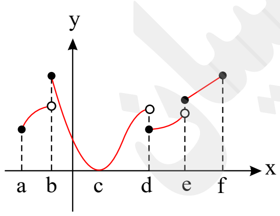
–قلم چی–۱۳۹۵

۲۲. بیش‌ترین مقدار عبارت $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{1}{8}$

–قلم چی–۱۳۹۶

۲۳. شکل زیر نمودار تابع f است. تعداد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب کدام است؟



۱) یک – یک ۲) یک – دو

۳) دو – یک ۴) دو – دو

–قلم چی–۱۳۹۶

۲۴. اگر $(1,-2)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع درجه‌ی سوم $f(x)=ax^3+bx$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

–قلم چی–۱۳۹۶

۲۵. ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=-x^3+3x^2-2$ در بازه‌ی $[1,4]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

–قلم چی–۱۳۹۶

۲۶. مینیمم نسبی تابع $y=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $-\dfrac{۲\sqrt{۳}}{۹}$

-قلم چی-۱۳۹۶

۲۷. منحنی به معادله‌ی $y=x^{۲}e^{۱-x}$ در بازه‌ی (a,b) صعودی و تقعر آن به سمت بالاست. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) ۲

-قلم چی-۱۳۹۶

۲۸. اگر $f(x)=[x]$ باشد، مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع $y=f(x+f(-x))$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صیح است.)

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}$ - $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}-\{۰\}$

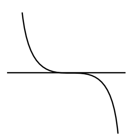
-قلم چی-۱۳۹۶

۲۹. سرعت نزول تابع به معادله‌ی $y=\cos x$ در نقاطی با کدام طول بیش‌ترین مقدار خود را دارد؟ $(k\in Z)$

۱) $x=۲k\pi+\pi$ ۲) $x=۲k\pi$ ۳) $x=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۲}$ ۴) $x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲}$

-قلم چی-۱۳۹۶

۳۰. نمودار تابع $y=۳x^{۵}-۱۰x^{۳}+۳$ در حوالی نقطه‌ای با کدام طول به صورت مقابل است؟



۱) صفر ۲) ۱
۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

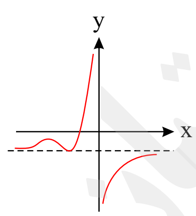
-قلم چی-۱۳۹۶

۳۱. به ازای کدام مقدار m، خط به معادله‌ی $x+y=۲m$ مجانب مایل منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{\dfrac{x^{۳}+۴x^{۲}}{x+۲}}$ است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲}$

-قلم چی-۱۳۹۶

۳۲. شکل زیر نمودار منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{x^{۳}+x^{۲}+ax+۱}{b-x^{۳}}$ را نشان می‌دهد. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱
۳) ۲ ۴) -۲

-قلم چی-۱۳۹۶

۳۳. تابع $f(x)=|\cos x|$ چند نقطه‌ی بحرانی در فاصله‌ی $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

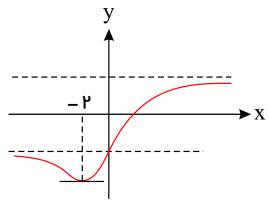
-قلم چی-۱۳۹۶

۳۴. اگر طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تقعر منحنی $f(x)=(۲x+k)Ln(x-۱)$ در آن رو به پایین است، برابر ۶ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

-قلم چی-۱۳۹۶

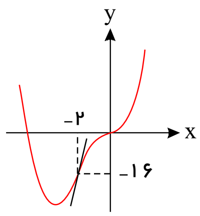
۳۵. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax-2}{\sqrt{x^2+b}}$ را نمایش می‌دهد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(1,4)$
۲) $(-1,4)$
۳) $(2,1)$
۴) $(-2,1)$

-قلم چی-۱۳۹۶

۳۶. اگر شکل مقابل مربوط به تابع $f(x)=ax^4+bx^3$ باشد، $a\cdot b$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) -8
۴) -4

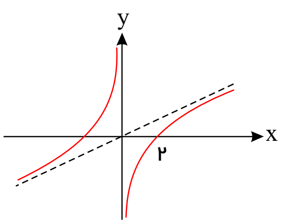
-قلم چی-۱۳۹۶

۳۷. نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$ چگونه است؟

۱) مینیمم نسبی
۲) ماکسیمم نسبی
۳) عطف
۴) مشتق‌ناپذیر

-قلم چی-۱۳۹۶

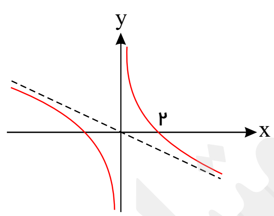
۳۸. شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{ax^2-1}{x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) صفر
۲) $\dfrac{1}{4}$
۳) $\dfrac{1}{2}$
۴) ۲

-سراسری-۱۳۹۶

۳۹. شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{2+ax^2}{b+x}$ است. $a-b$ کدام است؟



۱) -1
۲) $-\dfrac{1}{2}$
۳) صفر
۴) $\dfrac{1}{2}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶

۴۰. منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$، با کدام طول، مجانب خود را قطع می‌کند؟

۱) $\dfrac{1}{9}$
۲) $\dfrac{1}{6}$
۳) $\dfrac{1}{3}$
۴) $\dfrac{2}{3}$

-خارج از کشور-۱۳۹۶

۱.گزینه ۱ منظور از بیشترین شدت نزول، کمترین مقدار مشتق تابع است.

$$f'(x)=x^2-3x+2$$

مشتق تابع، درجه‌ی دوم است و کمترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، عرض رأس سهمی است.

$$y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(1)(2)-9}{4(1)}=\frac{-1}{4}$$

۲.گزینه ۱ تابع در $x=c$ دارای Min نسبی و در $x=d$ دارای Max نسبی است. (ابتدای بازه، اکسترمم نسبی نمی‌باشد و در نقاط b و d مقدار تابع از یکی از همسایه‌های راست و چپ بالاتر و از دیگری پایین‌تر است بنابراین اکسترمم نسبی نمی‌باشند)

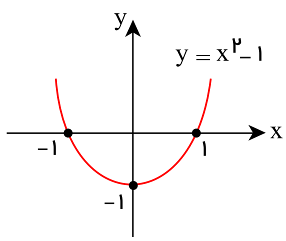
۳.گزینه ۳ روش اول :

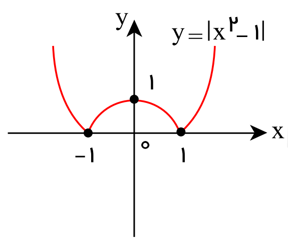
در تابع $y=|u|$ از حل معادلات $u'=0, u=0$ می‌توان طول نقاط بحرانی تابع را بدست آورد.

$$\left.\begin{array}{l} u=0\to x^2-1=0\to x=1, x=-1 \\ u'=0\to 2x=0\to x=0 \end{array}\right\}\to \text{۳ نقطه‌ی بحرانی دارد.}$$

روش دوم :

به کمک رسم شکل، نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.





همانطور که مشاهده می‌کنید در $x=-1, x=1$ مشتق وجود ندارد (نقاط زاویه‌دار) و در $x=0$ ، مشتق برابر صفر است.

۴.گزینه ۴ برای آنکه تابع صعودی باشد و تقعر آن روبه پائین باشد باید $f'\rangle 0$ و $f''\langle 0$ باشد.

$$f'>0\to 6x^2-18x+12>0\to x^2-3x+2>0\to (x-1)(x-2)>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<1 \text{ یا } x>2 (I)$$

$$f''<0\to 12x-18<0\to 12x<18\to x<\frac{3}{2} (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x<1$ می‌رسیم.

۵.گزینه ۴ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای ۲ خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند و ۲) طولشان، مشتق را صفر می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} \binom{1}{2} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 2=\frac{a+b}{1}\to a+b=2 \\ f(x)=ax+\frac{b}{x}\to f'(x)=a-\frac{b}{x^2} \xrightarrow{f'(1)=0} a-b=0 \end{array}\right\}\to a=1, b=1$$

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\to f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\to f''(x)=\frac{2}{x^3}\to$$

در اطراف $x=0$ جهت تقعر عوض می‌شود ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نقطه‌ی عطف نمی‌باشد.

۶.گزینه ۳

کافی است مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی بدست آورده و با هم مقایسه کنیم.

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(x^۲+۳)-۲x(x^۲-۳x)}{(x^۲+۳)^۲}=۰\rightarrow ۲x^۳+۶x-۳x^۲-۹-۲x^۳+۶x^۲=۰$$

$$\rightarrow ۳x^۲+۶x-۹=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=\frac{c}{a}=-۳\end{cases}$$ **(در بازه قرار ندارد) غ ق ق**

$$f(-۱)=۱,\ f(۱)=-\frac{۱}{۲},\ f(۲)=-\frac{۲}{۷}$$

کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۷.گزینه ۱

$$f(x)=۲x+x^{\frac{۱}{۳}}\rightarrow f'(x)=۲+\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}\rightarrow f''(x)=-\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}=\frac{-۲}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

y'' صفر نمی‌شود و به ازای $x=۰$, y'' وجود ندارد.

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y″	+	‖	−
y	∪	‖	∩

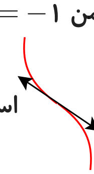
$\Rightarrow$ با توجه به جدول در بازه‌ی $(-۳,۳)$ ، ابتدا تقعر رو به بالا و سپس تقعر رو به پایین است.

۸.گزینه ۲

طول نقطه‌ی عطف: $f(x)=-x^۳-x+۱\rightarrow f'(x)=-۳x^۲-۱\rightarrow f''(x)=-۶x=۰\rightarrow x=۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	+	۰	−
y	∪		∩

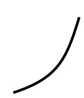
$\Longrightarrow$ قبل از نقطه‌ی عطف تقعر رو به بالا و بعد از آن تقعر رو به پایین است.

و در ضمن $f'(۰)=-۱$ می‌باشد یعنی شیب خط مماس در نقطه‌ی عطف، منفی است پس نمودار تابع در اطراف نقطه‌ی عطف به صورت  **است.**

۹.گزینه ۱

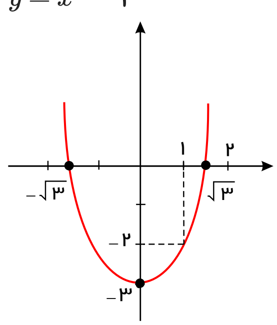
$$f'(x)=(۱)Lnx+\frac{۱}{x}(x)=Lnx+۱\rightarrow f'(۱)=۰+۱>۰\rightarrow$$ **صعودی**

$$f''(x)=\frac{۱}{x}\rightarrow f''(۱)=۱>۰\rightarrow$$ **تقعر رو به بالا**

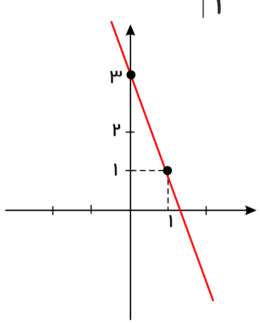
بنابراین نمودار تابع f در حوالی $x=۱$ به صورت  **می‌باشد.**

۱۰.گزینه ۲ **برای حل این تست از رسم شکل کمک می‌گیریم.**

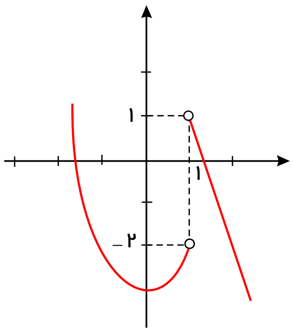
$y=x^۲-۳$



$$y=۳-۲x\rightarrow A\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix}\ ,\ B\begin{vmatrix}۰\\۳\end{vmatrix}$$



از ترکیب این دو شکل، شکل زیر حاصل می‌گردد.



دقت کنید اگر $a \geq ۱$ باشد در این صورت $x = ۱$ طول Max نسبی است و اگر $a < -۲$ باشد در این صورت $x = ۱$ طول Min نسبی است بنابراین a نمی‌تواند سه مقدار صحیح -۲ و -۱ و ۰ را قبول کند.

۱۱.گزینه ۳ باتوجه به صورت سوال، $x = ۴$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

$$x_{\text{عطف}} = \frac{-b}{۳a} \to ۴ = \frac{-(a^۲+۳)}{۳(\frac{-۱}{۳}a)} \to ۴ = \frac{a^۲+۳}{a} \to a^۲ - ۴a + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰} \begin{cases} a = ۱ \\ a = \frac{c}{a} = ۳ \end{cases}$$

چون در صورت سوال گفته شده است اول تقعر رو به بالا و سپس رو به پائین است باتوجه به شکل‌های تابع درجه‌ی سوم باید ضریب $x^۳$ ، منفی باشد بنابراین هر دو جواب قابل قبول هستند.

۱۲.گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^۳ + x^۲}{x^۲ + ۱ - ۲x + ۱} = \frac{x^۳ + x^۲}{x^۲ - ۲x + ۲}$$

برای پیدا کردن مجانب مایل، کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + x^۲ & x^۲ - ۲x + ۲ \\ \cline{2-2} & x + ۳ \\ \underline{-x^۳ + ۲x^۲ - ۲x} & \\ ۳x^۲ - ۲x & \\ \underline{-۳x^۲ + ۶x - ۶} & \\ ۴x - ۶ & \end{array}$$

$$\to y = x + ۳ \ : \text{مجانب مایل}$$

دقت کنید ریشه‌ی باقی‌مانده، طول نقطه‌ی برخورد مجانب مایل با تابع است.

$$۴x - ۶ = ۰ \to x = \frac{۶}{۴} = ۱/۵$$

۱۳.گزینه ۲ کافی‌است از تابع، مشتق گرفته و بزرگتر از صفر قرار دهیم.

$$y = x \cdot e^{x-x^۲} \to y' = e^{x-x^۲} + (۱-۲x)(x)e^{x-x^۲} = \underbrace{e^{x-x^۲}}_{+}(۱ + x - ۲x^۲) > ۰ \to -۲x^۲ + x + ۱ > ۰$$

$$\to \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -\frac{۱}{۲} & & ۱ & & +\infty \\ \hline y' & & - & ۰ & + & ۰ & - & \end{array} \to x \in (-\frac{۱}{۲}, ۱)$$

۱۴.گزینه ۱ کافی است از تابع، حد در بی‌نهایت بگیریم و برای این منظور از هم ارزی و اندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} (x + \sqrt{ax^۲ - ۴x}) = \lim_{x\to\pm\infty} (x + \sqrt{a}|x - \frac{۴}{۲a}|)$$

$$x \to +\infty : y = x + \sqrt{a}x - \frac{۴\sqrt{a}}{۲a} \to y = (۱ + \sqrt{a})x - \frac{۲\sqrt{a}}{a} (I)$$

$$x \to -\infty : y = x - \sqrt{a}x + \frac{۴\sqrt{a}}{۲a} \to y = (۱ - \sqrt{a})x + \frac{۲\sqrt{a}}{a} (II)$$

معادله‌ی (I) نمی‌تواند نشان‌دهنده‌ی مجانب افقی باشد زیرا معادله‌ی مجانب افقی به صورت عدد $= y$ است و ضریب x، یعنی $\sqrt{a}+1$ هرگز نمی‌تواند صفر شود ولی معادله‌ی (II) اگر ضریب x صفر باشد می‌تواند مجانب افقی باشد.

$1-\sqrt{a}=0 \to a=1$

$a=1 \xrightarrow{I} y=2x-\dfrac{2\sqrt{1}}{1} \to y=2x-2$:مجانب مایل

.۱۵گزینه ۱

$f(x)=x^4-8x^2 \to f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \text{ غ ق ق(در بازه قرار ندارد)} \end{cases}$

حال باید مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول‌های نقاط بحرانی بدست آورید.

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=-16 \to \text{مطلق}Min \\ f(-1)=-7 \\ f(3)=9 \to \text{مطلق}Max \end{cases} \to 9-(-16)=25$

.۱۶گزینه ۱ این تابع دارای دو مجانب قائم با طول مثبت است بنابراین مخرج باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد.

$\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to b^2-4c>0 \to b^2>4c \to$ گزینه‌ی ۳ حذف می‌شود.

$\text{ضرب دو ریشه}>0 \to \dfrac{c}{a}>0 \to c>0 \to$ گزینه‌ی ۲ حذف می‌شود.

$\text{جمع دو ریشه}>0 \to -\dfrac{b}{a}>0 \to -b>0 \to b<0 \to$ گزینه‌ی ۴ حذف می‌شود.

.۱۷گزینه ۱ مرکز تقارن تابع درجه‌ی سوم همان نقطه‌ی عطف تابع است.

$x_{\text{عطف}}=\dfrac{-b}{3a} \to x_{\text{عطف}}=\dfrac{3a}{3}=a \xrightarrow{\text{تابع}} y_{\text{عطف}}=a^3-3a^3-16=-2a^3-16$

چون نقطه‌ی عطف روی محور طول قرار دارد پس عرض آن صفر است.

$-2a^3-16=0 \to 2a^3=-16 \to a^3=-8 \to a=-2$

.۱۸گزینه ۳

$x_{\text{عطف}}=\dfrac{-b}{3a} \to 1=\dfrac{-a}{3} \to a=-3$

$A\left|\begin{matrix}1\\-11\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق درتابع}} -11=1+a+b \to -11=1-3+b \to b=-9$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=x^3-3x^2-9x$ در می‌آید.

$f(-1)=-1-3+9 \to f(-1)=5$

.۱۹گزینه ۱ $x=0$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می‌کند.

$x=0 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 0+b=0 \to b=0$

چون تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0=\dfrac{2a+2}{4+b} \to 2a+2=0 \to a=-1$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2}$ است.

$f'_{(x)}=\dfrac{-1(x^2)-2x(-x+2)}{x^4}=\dfrac{-x^2+2x^2-4x}{x^4}=\dfrac{x^2-4x}{x^4}=\dfrac{x(x-4)}{x^4}=\dfrac{x-4}{x^3}=0$

$\to x=4 \xrightarrow{\text{تابع}} y=\dfrac{-4+2}{16}=-\dfrac{1}{8}$

توجه کنید که در $x = \circ$، مشتق وجود ندارد ولی چون در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد نمی‌تواند طول اکسترمم نسبی تابع باشد.

۲۰.گزینه ۴

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{(a+۳)x^۳+۴x^۲+۳}{bx^۲-۱} = ۴$$

چون حاصل حد، عددی غیر صفر است، پس باید درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشد. پس:

$$a+۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴x^۲+۳}{bx^۲-۱} = ۴ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴x^۲}{bx^۲} = \frac{۴}{b} = ۴ \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۴x^۲+۳}{x^۲-۱}$$

مجانب‌های قائم: $x = \pm ۱ \Leftarrow ۰ = x^۲-۱ \Leftarrow ۰ =$ مخرج

محل برخورد مجانب‌ها، دو نقطه‌ی $A(۱,۴)$ و $B(-۱,۴)$ است. پس:

$$AB = \sqrt{(۱-(-۱))^۲+(۴-۴)^۲} = ۲$$

۲۱.گزینه ۴ **برای تعین نقطه‌ی اکسترمم نسبی، ریشه یا ریشه‌های ساده‌ی مشتق را می‌یابیم.**

$$f(x) = \frac{x^۲+kx+۴}{x^۲+۲x+۶} \to f'(x) = \frac{(۲x+k)(x^۲+۲x+۶)-(۲x+۲)(x^۲+kx+۴)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

$$= \frac{۲x^۳+۴x^۲+۱۲x+kx^۲+۲kx+۶k-۲x^۳-۲kx^۲-۸x-۲x^۲-۲kx-۸}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

$$= \frac{۲x^۲-kx^۲+۴x+۶k+۸}{(x^۲+۲x+۶)^۲} = \frac{(۲-k)x^۲+۴x+(۶k-۸)}{(x^۲+۲x+۶)^۲}$$

چون در صورت سوال قید شده تابع فقط دارای یک اکسترمم نسبی است پس باید صورت کسر مشتق، فقط یک ریشه‌ی ساده داشته باشد یعنی صورت از درجه اول است پس $۲-k = ۰ \to k = ۲$

$$f'(x) = \frac{۴x+۴}{(x^۲+۲x+۶)^۲} = ۰ \to x = -۱ \to f(-۱) = \frac{۱-۲+۴}{۱-۲+۶} = \frac{۳}{۵}$$ **عرض اکسترمم**

۲۲.گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\sin u\cos u = \frac{۱}{۲}\sin ۲u}$

$$\sin\frac{x}{۲}\cdot\cos\frac{x}{۲} = \frac{۱}{۲}\sin ۲(\frac{x}{۲}) = \frac{۱}{۲}\sin x$$

بیشترین مقدار عبارت $\sin x$ برابر یک می‌باشد بنابراین بیشترین مقدار عبارت $\frac{۱}{۲}\sin x$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۳.گزینه ۲ **نقاط f, a به دلیل آنکه دو سر بازه هستند و یک طرفشان همسایه وجود ندارد اکسترمم نسبی نمی‌باشند. نقطه‌ی b از دو هسایه‌ی راست و چپش بالاتر است پس نقطه‌ی Max نسبی است. نقاط c و d چون از همسایه‌های راست و چپشان پایین‌تر هستند نقطه‌ی Min نسبی می‌باشند. نقطه‌ی e از همسایه‌ی راستش پایین‌تر و از همسایه‌ی راستش بالاتر است بنابراین اکسترمم نسبی نمی‌باشد. پس این تابع دارای یک ماکسیم و دو مینیمم نسبی است.**

۲۴.گزینه ۳ **نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:**
۱) در تابع صدق می‌کنند.
۲) طولشان، y' را صفر می‌کند.

$$A\Big|_{-۲}^{۱} \xrightarrow{\text{صدق}} -۲ = a+b$$

$$A\Big|_{-۲}^{۱} \xrightarrow{\text{طولش } y' \text{ را صفر می‌کند}} y' = ۳ax^۲+b \to ۰ = ۳a+b$$

$$\begin{cases} a+b=-۲ \\ ۳a+b=۰ \end{cases} \to a=۱, b=-۳ \to f(x)=x^۳-۳x \to f(۲)=۸-۶=۲$$

۲۵.گزینه ۲ کافی است که مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی (در صورت وجود) بدست آوریم در بین این اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها Max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها Min مطلق است.

$$f(x)=-x^۳+۳x^۲-۲ \to f'(x)=-۳x^۲+۶x=-۳x(x-۲)=۰ \to x=۰, x=۲$$

$$\xrightarrow{x\in[۱,۴]} x=۲$$

$$f(۱)=-۱+۳-۲=۰ \quad , \quad f(۴)=-۶۴+۴۸-۲=-۱۸ \quad , \quad f(۲)=-۸+۱۲-۲=۲$$

بنابراین Max مطلق تابع برابر ۲ می‌باشد.

۲۶.گزینه ۴ کافی است از تابع، مشتق گرفته و سپس آن را تعیین علامت کنیم.

$$y=\frac{x^۲-۱}{x^۳} \to y'=\frac{۲x(x^۳)-۳x^۲(x^۲-۱)}{x^۶}=\frac{۲x^۴-۳x^۴+۳x^۲}{x^۶}=\frac{-x^۴+۳x^۲}{x^۶}$$

$$=\frac{x^۲(-x^۲+۳)}{x^۶}=\frac{۳-x^۲}{x^۴}=۰ \to ۳-x^۲=۰ \to x=\pm\sqrt{۳}$$

و به ازای $x=۰$, y' وجود ندارد.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y′		$-$	۰	$+$	‖	$+$	۰	$-$	
y		↘	Min	↗		↗		↘	

برای پیدا کردن عرض Min کافی است که $x=-\sqrt{۳}$ را در تابع قرار دهیم.

$$x=-\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{تابع}} yMin=\frac{(-\sqrt{۳})^۲-۱}{(-\sqrt{۳})^۳}=\frac{۳-۱}{-۳\sqrt{۳}}=\frac{۲}{-۳\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$$

۲۷.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=e^u \to y'=u'\cdot e^u, (uv)'=u'v+v'u}$

باید فواصلی را پیدا کنیم که $y''>۰, y'>۰$ است.

$$y'=۲xe^{۱-x}+(-۱)e^{۱-x}x^۲=\underbrace{e^{۱-x}}_{+}(۲x-x^۲)>۰ \to x(۲-x)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰<x<۲ : I$$

$$y''=-e^{۱-x}(۲x-x^۲)+(۲-۲x)e^{۱-x}=e^{۱-x}(-۲x+x^۲+۲-۲x)=\underbrace{e^{۱-x}}_{+}(x^۲-۴x+۲)=۰$$

$$\to \Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۸=۸ \to \begin{cases} x=\frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲}=۲+\sqrt{۲} \\ x=\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۲}=۲-\sqrt{۲} \end{cases}$$

→

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۲}$		$۲+\sqrt{۲}$		$+\infty$
y''		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

$$\to x<۲-\sqrt{۲} \ \cup \ x>۲+\sqrt{۲} : II$$

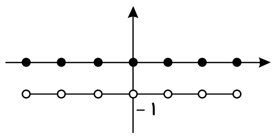
$$I\cap II : x\in(۰,۲-\sqrt{۲}) \to Max(b-a)=۲-\sqrt{۲}$$

۲۸.گزینه ۲

$$f(x)=[x]\to y=f(x+f(-x))=f(x+[-x])=[x+\underbrace{[-x]}_{\text{صحیح}}]$$

$$=[x]+[-x]\to\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=0\\ x\notin\mathbb{Z}\to[x]+[-x]=-1\end{cases}$$

حال، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، نقاط صحیح، نقاط بحرانی از نوع مشتق ناپذیر هستند و در سایر نقاط (خط افقی) مشتق برابر صفر است پس این تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد.

۲۹.گزینه ۴

$$y=\cos x\to y'=-\sin x$$

حال، باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط مقدار y'، منفی‌ترین است برای این منظور کافی است $\sin x$ بیشترین مقدار خود یعنی یک باشد.

$$\sin x=1\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۳۰.گزینه ۱ طول نقطه‌ی مورد نظر را a در نظر بگیرید در سمت چپ این نقطه، تقعر رو به بالا و در سمت راست آن تقعر رو به پایین است بنابراین کافی است از تابع داده شده دو بار مشتق بگیرید و آن را تعیین علامت کنید.

$$y=3x^5-10x^3+3\to y'=15x^4-30x^2\to y''=60x^3-60x=60x(x^2-1)=0$$

$$\to x=0\ ,\ x=1\ ,\ x=-1\to$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین طول نقطه‌ی مورد نظر $x=0$ است.

۳۱.گزینه ۳ ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم و سپس از هم‌ارزی واندروالسی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2 & x+2\\ \underline{-x^3-2x^2} & \overline{x^2+2x-4}\\ 2x^2 & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ -4x & \\ \underline{4x+8} & \\ 8 & \end{array}\quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{x^2+2x-4+\frac{8}{x+2}}$$

واضح است که $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x+2}=0$ است حال بر طبق هم‌ارزی واندروالسی داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+2x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1}\,|x+\frac{2}{1\times 2}|=\lim_{x\to\pm\infty}|x+1|$$

$$\begin{cases}x=+\infty: y=x+1\\ x=-\infty: y=-x-1\end{cases}\xrightarrow{y=-x+2m}2m=-1\to m=\frac{-1}{2}$$

به هم‌ارزی واندروالسی با شرط $a>0$ توجه کنید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^{2}+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

۳۲.گزینه ۳ از روی شکل، واضح است که $x=0$ مجانب قائم تابع است پس $x=0$ در مخرج تابع صدق می‌کند، بنابراین $b=0$ است. از تابع، حد در بی‌نهایت می‌گیریم تا معادله‌ی مجانب افقی تابع بدست آید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^2+ax+1}{-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{-x^3}=-1\to y=-1$$

بنابراین عرض Min تابع برابر $y=-1$ است پس کافی است که آن را با معادله‌ی منحنی تلاقی دهیم و معادله‌ی تلاقی ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3+x^2+ax+1}{-x^3} \\ y=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{x^3+x^2+ax+1}{-x^3}=-1\to x^3+x^2+ax+1=x^3$$

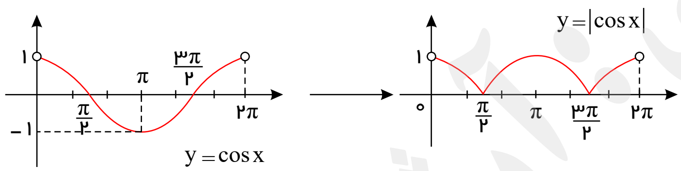
$\to x^2+ax+1=0$: معادله‌ی تلاقی

شرط ریشه‌ی مضاعف : $\Delta=0\to b^2-4ac=0\to a^2-4=0\to a^2=4\to a=2\ ,\ a=-2$

$$\to\begin{cases} a=2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2+2x+1=0\to(x+1)^2=0\to x=-1 \\ a=-2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2-2x+1=0\to(x-1)^2=0\to x=1 \quad \text{غ ق ق (طول تماس منفی است)} \end{cases}$$

پس $a+b=2$ است.

۳۳.گزینه ۲ به نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف که به ازای آنها مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد نقاط بحرانی گویند. این سؤال را به کمک رسم شکل حل می‌کنیم.



تابع در $x=\dfrac{\pi}{2}$ و $x=\dfrac{3\pi}{2}$ مشتق‌ناپذیر است (نقاط زاویه‌دار) و در $x=\pi$ مشتق برابر صفر است. بنابراین تابع دارای سه نقطه‌ی بحرانی است.

۳۴.گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{y=Ln u\to y'=\dfrac{u'}{u}\ \ ,\ \ (uv)'=u'v+v'u}$

باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن بازه، مشتق دوم منفی است.

$$f(x)=(2x+k)Ln(x-1)\to f'(x)=2Ln(x-1)+\frac{1}{x-1}(2x+k)=2Ln(x-1)+\frac{2x+k}{x-1}$$

$$\to f''(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{2(x-1)-1(2x+k)}{(x-1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2-k}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-2-k}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x-4-k}{\underbrace{(x-1)^2}_{+}}<0\to 2x-4-k<0\to 2x<k+4\to x<\frac{k+4}{2}$$

از طرفی عبارت جلوی Ln باید مثبت باشد یعنی: $x-1>0\ \to x>1$. از اشتراک دو جواب به دست آمده به $1<x<\dfrac{k+4}{2}$ یا $x\in(1,\dfrac{k+4}{2})$ می‌رسیم.

طول بازه $=6\to\dfrac{k+4}{2}-1=6\to\dfrac{k+4}{2}=7\to k+4=14\to k=10$

۳۵.گزینه ۱ تابع داده شده دارای دو مجانب افقی است و تابع، آن مجانب افقی را که $x\to-\infty$ روی محور عرض قطع می‌کند.

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-۲}{\sqrt{x^۲+b}} \overset{\text{پر توان}}{=\!=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^۲}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{-x} = -a \to y=-a$

a و b باید مثبت باشند بنابراین گزینه‌های دوم و چهارم حذف می‌شوند. $\to \left|\begin{matrix}۰\\-a\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} -a = \dfrac{-۲}{\sqrt{b}} \to a = \dfrac{۲}{\sqrt{b}}$

$x=-۲$ طول اکسترمم نسبی تابع است بنابراین مشتق تابع به ازای $x=-۲$ برابر صفر است.

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x^۲+b}-\dfrac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+b}}(ax-۲)}{x^۲+b} = \frac{\dfrac{a(x^۲+b)-x(ax-۲)}{\sqrt{x^۲+b}}}{x^۲+b} = \frac{ax^۲+ab-ax^۲+۲x}{(x^۲+b)\sqrt{x^۲+b}}$$

$$\xrightarrow{f'(-۲)=۰} ab-۴=۰ \to ab=۴ \xrightarrow[\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}]{a=\frac{۲}{\sqrt{b}}} a=۱\ ,\ b=۴$$

۳۶.**گزینه ۲** با توجه به شکل داده شده نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد که در تابع صدق می‌کند و طولش، مشتق دوم را صفر می‌کند.

$$A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۱۶ = ۱۶a-۸b \to ۲a-b=-۲$$

$$A\left|\begin{matrix}-۲\\-۱۶\end{matrix}\right. \xrightarrow{f''(-۲)=۰} f'(x) = ۴ax^۳+۳bx^۲ \to f''(x) = ۱۲ax^۲+۶bx \to ۴۸a-۱۲b=۰$$

$$\to ۴a-b=۰$$

$$\begin{cases}۲a-b=-۲\\ ۴a-b=۰\end{cases} \to a=۱\ ,\ b=۴ \to a\times b=۴$$

۳۷.**گزینه ۱** نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که به ازای آن‌ها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع داده شده $Df = R-\{۰\}$ است.

$$f(x) = \frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲}x^۲ \to f'(x) = \frac{-۱}{x^۲}+x = \frac{-۱+x^۳}{x^۲} = \frac{x^۳-۱}{x^۲}$$

$\to \begin{cases}\text{صورت} = ۰ \to x=۱ : \text{بحرانی}\\ \text{مخرج} = ۰ \to x^۲ = ۰ \to x=۰ \to\end{cases}$ بحرانی نمی‌باشد زیرا در دامنه‌ی تعریف تابع قرار ندارد

$\to$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	ن	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

بنابراین $x=۱$ طول نقطه‌ی Min نسبی تابع است.

۳۸.**گزینه ۲** $x=۰$ مجانب قائم تابع است پس در مخرج صدق می‌کند.

$$x=۰ \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} ۰+b=۰ \to b=۰$$

تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ می‌گذرد بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \to ۰ = \frac{۴a-۱}{۲+۰} \to a=\frac{۱}{۴} \to a+b=\frac{۱}{۴}$$

۳۹.**گزینه ۲** از روی شکل مشخص است که محور عرض یعنی $x=۰$ مجانب قائم تابع است پس $x=۰$ در مخرج صدق می‌کند.

$$x=۰ \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} b+۰=۰ \to b=۰ \to f(x) = \frac{۲+ax^۲}{x}$$

از طرفی تابع از نقطه‌ی $\left.\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right|$ عبور می‌کند بنابراین مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 0=\frac{2+4a}{2}\rightarrow 2+4a=0\rightarrow 4a=-2\rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

پس $a+b=-\frac{1}{2}$ است.

۴۰.گزینه ۱ طبق هم‌ارزی واندروالسی، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}\sim\sqrt[3]{a}\,(x+\frac{b}{3a})$ است.

مجانب مایل: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1}\,(x-\frac{1}{1\times 3})\rightarrow y=x-\frac{1}{3}$

اکنون مجانب مایل را با منحنی تلاقی می‌دهیم.

$$\sqrt[3]{x^3-x^2}=x-\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{توان } 3}x^3-x^2=x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}$$

$$\rightarrow\frac{1}{3}x=\frac{1}{27}\rightarrow x=\frac{1}{9}$$

توجه کنید که $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ است.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۳۷۰۵۱۷

۱- ۱	۲- ۱	۳- ۳	۴- ۴	۵- ۴
۶- ۳	۷- ۱	۸- ۲	۹- ۱	۱۰- ۲
۱۱- ۳	۱۲- ۳	۱۳- ۲	۱۴- ۱	۱۵- ۱
۱۶- ۱	۱۷- ۱	۱۸- ۳	۱۹- ۱	۲۰- ۴
۲۱- ۴	۲۲- ۲	۲۳- ۲	۲۴- ۳	۲۵- ۲
۲۶- ۴	۲۷- ۳	۲۸- ۲	۲۹- ۴	۳۰- ۱
۳۱- ۳	۳۲- ۳	۳۳- ۲	۳۴- ۳	۳۵- ۱
۳۶- ۲	۳۷- ۱	۳۸- ۲	۳۹- ۲	۴۰- ۱